

Contrôle final de Thermodynamique (1h 30 mn)

Question de cours (5 pts)

1°) A partir de la définition de l'enthalpie : $H = U + PV$, montrer que la relation de Rober-Mayer, pour une mole de gaz parfait, s'écrit sous la forme : $C_p - C_v = R$

R : constante universelle des gaz parfait, C_p et C_v sont respectivement les capacités thermiques à pression et volume constants.

2°) Ecrire la relation de Mayer pour n moles.

3°) Sachant que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et en utilisant la relation de Mayer, déterminer les expressions de C_p et C_v en

fonction de R, de γ et du nombre de mole n.

Exercice (15 pts)

On fait décrire à une mole d'un gaz parfait diatomique le cycle Diesel constitué des transformations réversibles suivantes :

- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique ;
- $2 \rightarrow 3$: chauffage isobare ;
- $3 \rightarrow 4$: détente adiabatique ;
- $4 \rightarrow 1$: refroidissement isochore.

On donne : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$; les rapports volumétriques des transformations adiabatiques :

$$a = \frac{V_1}{V_2} = 9 \quad \text{et} \quad b = \frac{V_4}{V_3} = 3 ; R = 8,32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1} ; P_1 = 10^5 \text{ Pa} ; T_1 = 300 \text{ K}.$$

1°) Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron (P, V). Justifier que le cycle est moteur.

2°) Calculer le volume V_1 du gaz à l'état 1.

3°) Déterminer les expressions de P_2 , P_3 et P_4 en fonction de a, b, γ et P_1 . Calculer leurs valeurs

4°) Déterminer les expressions de V_2 , V_3 et V_4 en fonction de a, b, γ et V_1 . Calculer leurs valeurs

5°) Déterminer et calculer les quantités de chaleur échangées au cours des différentes transformations.

6°) Déterminer et calculer les travaux mis en jeu le long du cycle. Déduire la variation de l'énergie interne sur tout le cycle.

7°) Déterminer les expressions de la variation d'entropie pour chaque transformation. Calculer leurs valeurs et vérifier que la variation d'entropie sur tout le cycle est nulle.

8°) Le cycle Diesel reçoit une quantité de chaleur Q_c durant la transformation $2 \rightarrow 3$ et rejette une quantité de chaleur Q_a durant la transformation $4 \rightarrow 1$. Etablir l'expression du rendement thermique du moteur en fonction de Q_c et Q_a . Calculer sa valeur.

9°) Montrer que l'expression du rendement thermique η s'écrit en fonction de a, b et γ sous la forme :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

Question de cours:

1°) on a $H = U + PV$

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{d(PV)}{dT}$$

$$dH = C_p dT$$

$$dU = C_v dT$$

et $PV = nRT$ ($n=1$)

$$C_p = C_v + R.$$

$$\boxed{C_p - C_v = R}$$

2°) $PV = nRT$

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{d}{dT}(nRT)$$

$$C_p = C_v + nR$$

$$\boxed{C_p - C_v = nR}$$

3°) on a $C_p - C_v = nR$

$$C_p \left(1 - \frac{C_v}{C_p}\right) = nR \quad \left| \gamma = \frac{C_p}{C_v}\right.$$

$$C_p \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = nR.$$

$$\boxed{C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}}$$

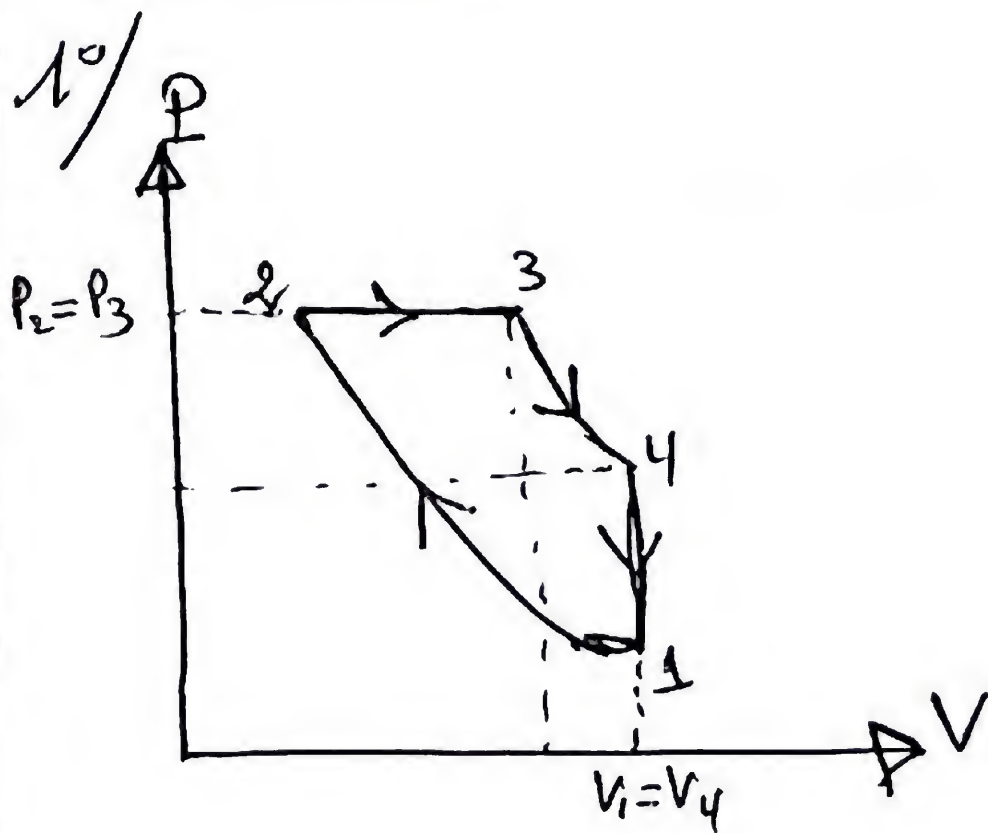
*) $C_p - C_v = nR.$

$$C_v \left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right) = nR.$$

$$C_v (\gamma - 1) = nR.$$

$$\boxed{C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}}$$

EXERCICE:



*) le parcours est effectué dans le sens horaire donc le cycle est moteur.

2°)

$$\text{On a } P_1 V_1 = R T_1.$$

$$V_1 = \frac{R T_1}{P_1}$$

$$\text{A.N.: } V_1 = 24,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

3°) $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \Rightarrow P_2 = a^\gamma \cdot P_1$$

$$\text{A.N.} \Rightarrow P_2 = 21,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

*) Transformation isobore $P = \text{cste.}$

$$\Rightarrow P_3 = P_2 = a^\gamma \cdot P_1$$

$$P_3 = 21,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

*) $P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma$

$$P_4 = P_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma = P_3 \cdot \frac{1}{b^\gamma}$$

$$P_4 = \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma \cdot P_1$$

$$P_4 = 4,65 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

3°)

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$V_2^\gamma = \frac{P_1}{P_2} \cdot V_1^\gamma = \left(\frac{V_1}{a} \right)^\gamma$$

$$V_2 = \frac{V_1}{a}$$

$$V_2 = 2,76 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

*) $P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma$

$$V_3^\gamma = \frac{P_4}{P_3} V_4^\gamma = \left(\frac{V_4}{b} \right)^\gamma$$

$$V_3 = \frac{V_4}{b} = \frac{V_1}{b} \quad V_3 = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

*) $V_4 = V_1$ Transf. isochore

$$V_4 = 24,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

5°)

$$Q_{12} = 0 \quad (\text{adiabatique})$$

*) $Q_{23} = \int_2^3 C_p dT$

$$= C_p (T_3 - T_2)$$

$$= C_p \left(\frac{P_3 V_3}{R} - \frac{P_2 V_2}{R} \right) \quad (P_2 = P_3)$$

$$= \frac{P_2 \cdot C_p}{R} (V_3 - V_2)$$

$$Q_{23} = \frac{\gamma^\gamma a^\gamma}{\gamma - 1} R T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

2

$$Q_{23} = 42,08 \text{ kJ}$$

$$*) Q_{3,4} = 0$$

$$\begin{aligned} *) Q_{4,1} &= C_V \int_4^1 dT \\ &= C_V (T_1 - T_4) \\ &= C_V \left(\frac{P_1 V_1}{R} - \frac{P_4 V_4}{R} \right) \\ &= \frac{V_1 C_V}{R} (P_1 - P_4) \quad \underline{V_1 = V_4} \\ &= C_V \cdot \frac{V_1 P_1}{R} \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma \right) \end{aligned}$$

$$Q_{4,1} = \frac{R}{\gamma-1} T_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma \right)$$

$$Q_{4,1} = -22,81 \text{ kJ}$$

$$\begin{aligned} 60) W_{12} &= - \int_1^2 P dV \\ P_1 V_1^\gamma &= P_2 V_2^\gamma = C = P V^\gamma \\ W_{12} &= -C \int_1^2 \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= -C \left[\frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{C V_1^{1-\gamma} - C V_2^{1-\gamma}}{1-\gamma} \end{aligned}$$

$$W_{12} = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{1-\gamma} \quad (3)$$

$$W_{12} = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} (1 - a^{\gamma-1})$$

$$W_{12} = 8,78 \text{ kJ}$$

$$\begin{aligned} *) W_{23} &= - \int_2^3 P_2 dV \\ &= -P_2 (V_3 - V_2) \\ &= -P_1 \cdot a^\gamma \left(\frac{V_1}{b} - \frac{V_1}{a} \right) \end{aligned}$$

$$W_{23} = -R T_1 \cdot a^\gamma \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$W_{23} = -12,02 \text{ kJ}$$

$$\begin{aligned} *) W_{34} &= - \int_3^4 P dV = - \int_3^4 C \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= -C \left[\frac{V_4^{1-\gamma} - V_3^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{P_3 V_3 - P_4 V_4}{1-\gamma} \end{aligned}$$

$$W_{34} = \frac{a^\gamma \cdot P_1 V_1}{1-\gamma} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$W_{34} = -16,03 \text{ kJ}$$

$$*) W_{4,1} = 0 \quad \underline{V = \text{cte}}$$

$$*) \Delta U_{\text{gel}} = W_{\text{gel}} + Q_{\text{gel}}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{gel}} &= W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \\ &= 8,78 - 12,02 - 16,03 \\ &= -19,27 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{gel}} &= Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} \\ &= 42,08 - 22,81 \\ &= 19,27 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta U_{\text{cycle}} = 0$$

$$70/ \Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}$$

$$*) \Delta S_{12} = 0 \quad \underline{Q=0}$$

$$*) \Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = C_p \int_2^3 \frac{\delta T}{T}$$

$$= C_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)$$

$$= C_p \ln\left(\frac{P_3 V_3}{P_2 V_2} \cdot \frac{R}{R}\right)$$

$$= C_p \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$$

$$\Delta S_{23} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Delta S_{23} = 32 \text{ J}$$

$$*) \Delta S_{34} = 0$$

4

$$*) \Delta S_{41} = C_v \int_4^1 \frac{dT}{T}$$

$$= C_v \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right)$$

$$= C_v \ln\left(\frac{P_1 V_1}{R} \cdot \frac{R}{P_4 V_4}\right)$$

$$= C_v \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right)$$

$$\Delta S_{41} = \frac{R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{b}{a}\right)^\gamma$$

$$\Delta S_{41} = -32 \text{ J}$$

*)

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41}$$

$$= -32 + 32$$

$$= 0$$

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0$$

$$80) \quad \eta = \left| \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_c} \right|$$

$$W_{\text{cycle}} < 0 \text{ et } Q_c = Q_{23} > 0$$

$$\eta = - \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_c}$$

$$\text{On a } W_{\text{cycle}} + Q_c + Q_a = 0$$

$$W_{\text{cycle}} = - (Q_c + Q_a)$$

$$\eta = \frac{Q_c + Q_a}{Q_c} = 1 + \frac{Q_a}{Q_c}$$

$$\boxed{\eta = 1 + \frac{Q_a}{Q_c}}$$

$$Q_a = Q_{41} = -22,81 \text{ kJ}$$

$$Q_c = Q_{23} = 42,08 \text{ kJ}$$

$$\eta = 1 - \frac{22,81}{42,08}$$

$$\boxed{\eta = 45,8\%}$$

$$90) \text{ On a } \eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} \quad (5)$$

$$\eta = 1 + \frac{\frac{R}{\delta-1} T_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\delta\right)}{\frac{\delta \cdot a^\delta}{\delta-1} T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$\eta = 1 + \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\delta}{\delta \cdot a^\delta \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$\eta = 1 + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a^{-\delta} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\delta\right)}{b^{-1} - a^{-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a^{-\delta} - b^{-\delta}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\delta} \frac{b^{-\delta} - a^{-\delta}}{b^{-1} - a^{-1}}}$$

Bonne chance

[Signature]

0666 80 3467